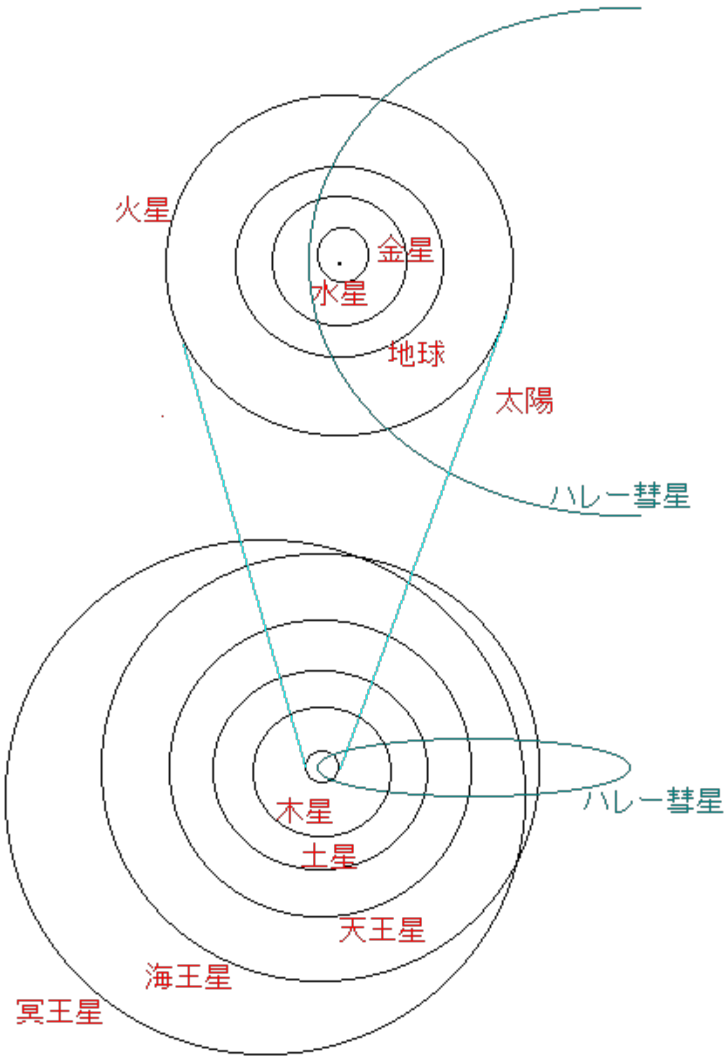
質点の力学と微分方程式

質点

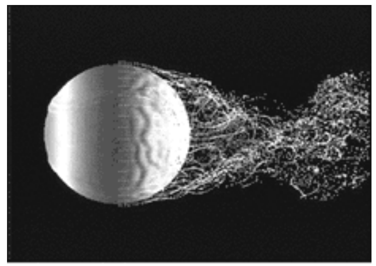


太陽系

力学では，実際には大きさのある物体を質量を持った「点」とみなして扱うことが多い．

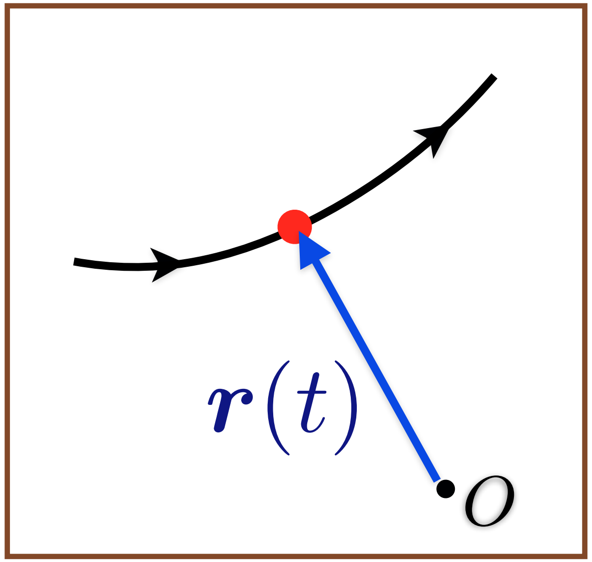
→ 質点

変化球はなぜ曲がる？



質点ではダメ！

質点の運動の記述



$\boldsymbol{r}(t)$: 時刻 t における
質点の位置ベクトル

⇨ 質点の運動の記述

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}$$

⇨ 速度

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2}$$

⇨ 加速度

ベクトル値関数の微分

$\boldsymbol{r}(t),\ \boldsymbol{v}(t),\ \boldsymbol{a}(t)$ は実数 t にベクトルを対応させる関数

⟹ ベクトル値関数

例えば $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ に対し

$$\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}\right) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2} = \left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}, \frac{d^2y(t)}{dt^2}, \frac{d^2z(t)}{dt^2}\right) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t))$$

成分ごとに微分

Ex. 2-1

$\frac{d}{dt}|\boldsymbol{r}(t)|^2 = 2\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)$ を示せ.

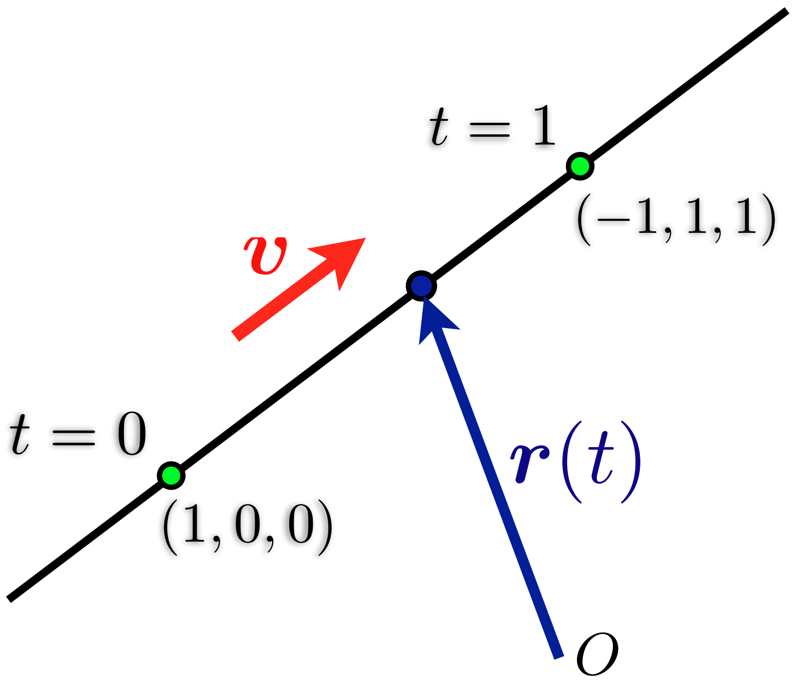
$|\boldsymbol{r}(t)|^2 = x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2$ なので

$$\frac{d}{dt}|\boldsymbol{r}(t)|^2 = 2(x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t) + z(t)\dot{z}(t)) = 2\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)$$

等速直線運動

Ex. 2-2

時刻 $t=0$ で位置 $(1,0,0)$, 時刻 $t=1$ で位置 $(-1,1,1)$
にいるような質点の等速直線運動を記述せよ.
さらに, この質点の加速度を求めよ.

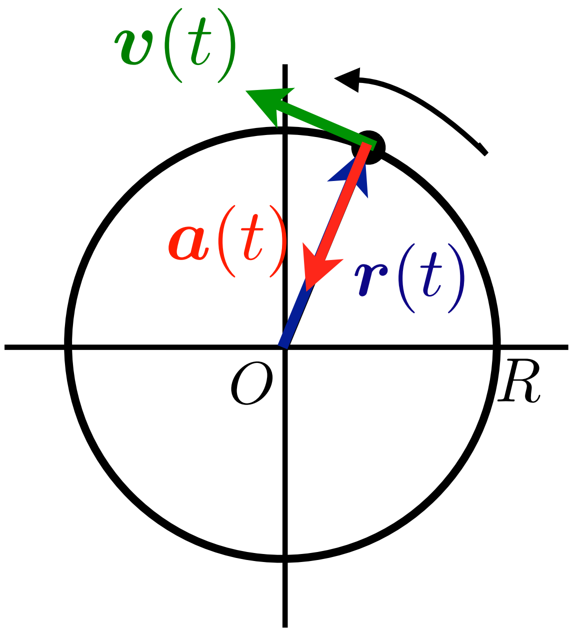


$$\boldsymbol{v}=\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{(-1,1,1)-(1,0,0)}{1-0}$$
$$=(-2,1,1)$$
$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(0)+t\boldsymbol{v}$$
$$=(1,0,0)+t(-2,1,1)$$
$$=(1-2t,t,t)$$
$$\boldsymbol{a}(t)=(0,0,0)$$

等速円運動

Ex. 2-3

平面上の原点を中心とする半径 R の円上を一定の角速度 ω で回転するする質点の運動を記述せよ． ただし $t=0$ において質点は $(R\cos\theta_0, R\sin\theta_0)$ にいるとする．さらに，この質点の速度と加速度，およびそれぞれの大きさを求めよ．



$$\boldsymbol{r}(t) = (R\cos(\omega t+\theta_0), R\sin(\omega t+\theta_0))$$

$$\boldsymbol{v}(t) = (-\omega R\sin(\omega t+\theta_0), \omega R\cos(\omega t+\theta_0))$$
$$= \omega R_{\pi/2}\boldsymbol{r}(t)$$

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$ 角 θ の回転行列

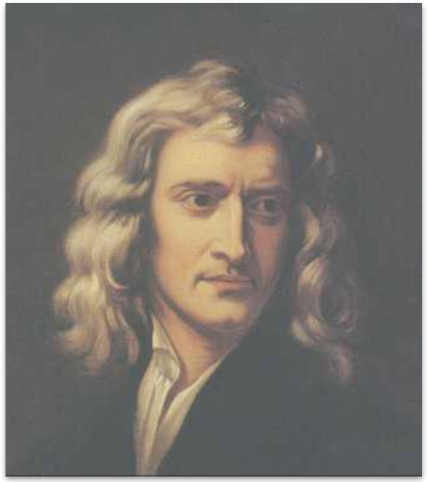
$$\boldsymbol{a}(t) = (-\omega^2 R\cos(\omega t+\theta_0), -\omega^2 R\sin(\omega t+\theta_0))$$
$$= -\omega^2\boldsymbol{r}(t)$$

$$|\boldsymbol{r}(t)| = R \qquad |\boldsymbol{v}(t)| = R\omega \qquad |\boldsymbol{a}(t)| = R\omega^2 = v^2/R$$

ニュートンの運動の第２法則

質点に加わっている力は, 質点の質量と加速度の積に等しい.

$$\boxed{m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}}$$



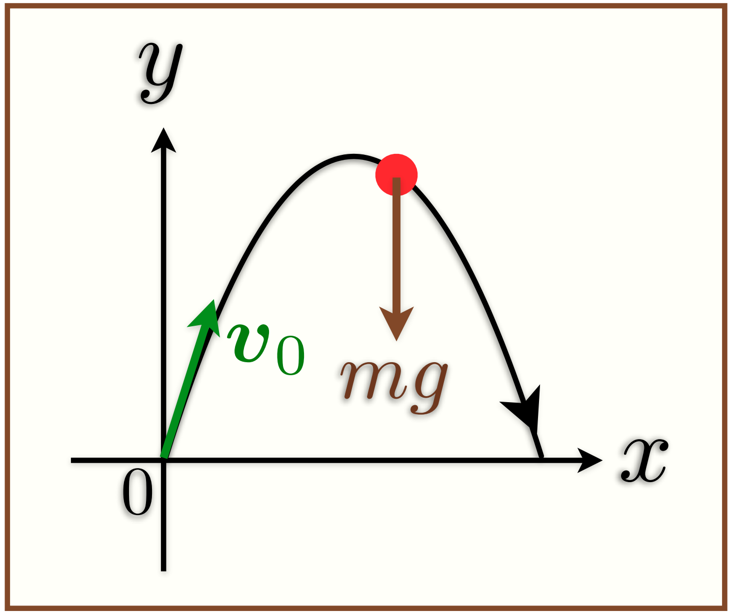
Isaac NEWTON (1642 - 1727)

微分方程式で書くと

$$\boxed{m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{f}} \quad \text{または} \quad \boxed{m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{f}}$$

→ ニュートンの運動の第２法則

2次元放物運動



Ex. 2-4

一様な重力場 (重力加速度 g) の中で, 原点から初速度 $\boldsymbol{v}_0 = (u_0, v_0)$ で打ち上げたボールの運動を求めよ.

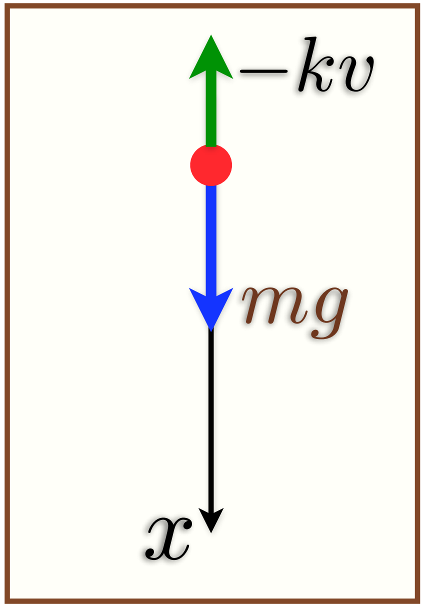
$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{f} \qquad \boldsymbol{f} = (0, -mg)$$

$$\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{0} \qquad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}(0) = \boldsymbol{v}_0$$

成分ごとに書くと
$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 & x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = u_0 \\ m\ddot{y} = -mg & y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = v_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = u_0 \\ \dot{y} = v_0 - gt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u_0 t \\ y = v_0 t - \dfrac{g}{2}t^2 \end{cases}$$

自由落下運動



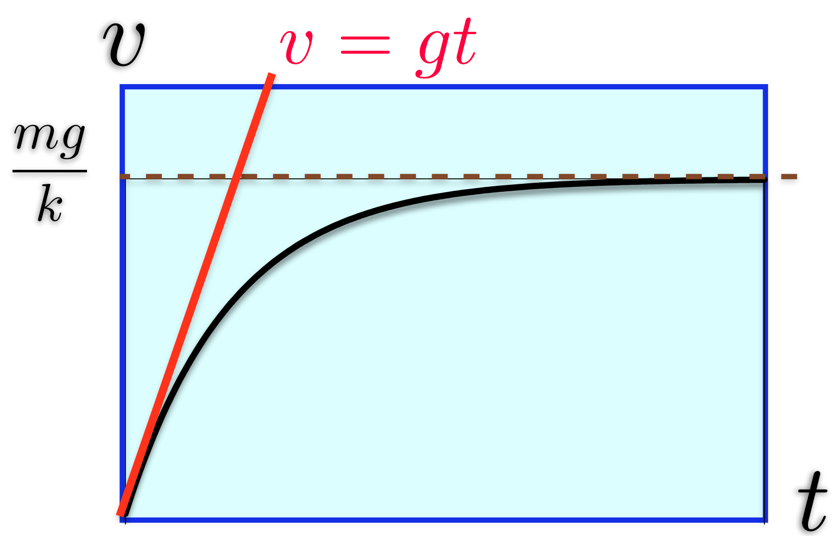
Ex. 2-5

一様な重力場 (重力加速度 g) の中で, 静止していた質点が時刻 $t=0$ に自由落下を開始する. この質点は, 速度に比例した抵抗力を受けるとする. 鉛直下方を正方向として質点の速度 $v(t)$ を求め, そのグラフを書け. また, 最終速度 v_∞ はいくらか.

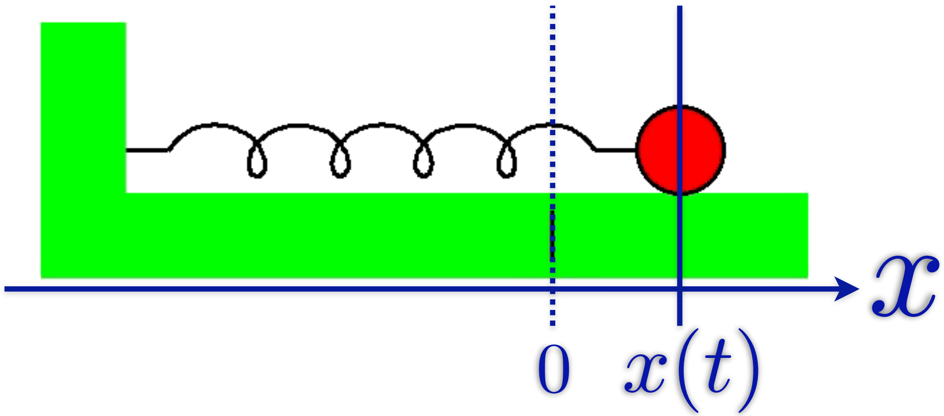
$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv \qquad v(0)=0$$

$$v=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

$$v_\infty=\frac{mg}{k}$$



バネ振り子



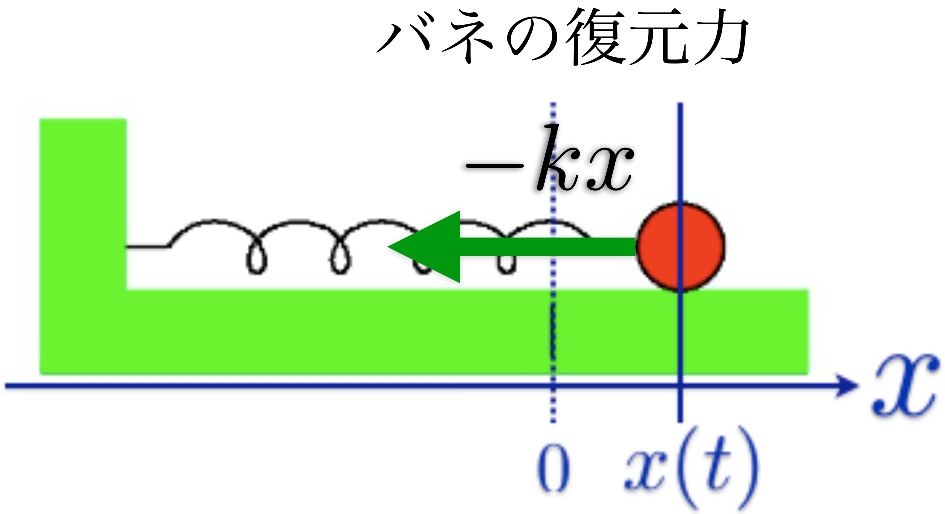
バネ振り子の運動は
1 次元運動

⇨ $x(t)$ で記述

フックの法則（Hooke's Law)

弾性限界内では、弾性体に加えられた力と歪み (伸び・ちぢみ) の量は比例する

単振動の方程式



m : おもりの質量
k : バネ定数
摩擦は無視できる

Ex. 2-6
$x(t)$ の満たすべき微分方程式を求めよ.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}$$

→ 単振動の方程式

単振動の方程式の解 $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad \cdots (*)$

Ex. 2-7

(1) $x = \cos\omega_0 t$ と $x = \sin\omega_0 t$ が (*) の解であることを確かめよ．

(2) 上の２つの解が一次独立であることを示せ．すなわち

$$A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t = 0 \quad \Longrightarrow \quad A = B = 0$$

$$t = 0 \longrightarrow A = 0 \qquad t = \pi/(2\omega_0) \longrightarrow B = 0$$

(3) $x_1(t)$ と $x_2(t)$ が (*) の解であるとき，それらの一次結合 $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ も (*) の解であることを示せ．

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{d^2}{dt^2}(c_1x_1 + c_2x_2) + \omega_0^2(c_1x_1 + c_2x_2)$$

$$= c_1\left(\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega_0^2 x_1\right) + c_2\left(\frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega_0^2 x_2\right) = 0$$

線形性

単振動の方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad \cdots (\ast)$

線形性より任意の定数 A, B に対し

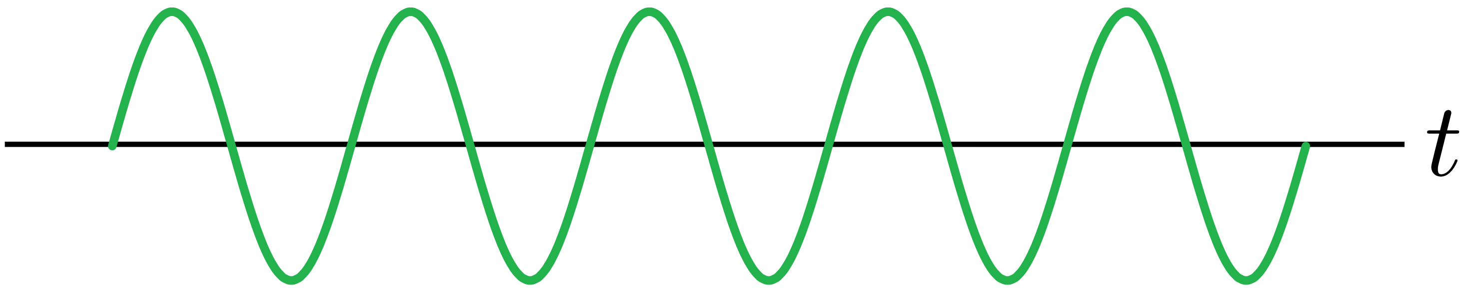
$$x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \ = C\sin(\omega_0 t + \phi)$$

は $(\ast)$ の解である．（実はこれ以外の解はない）

一般解　　　2自由度あり

未知定数の組 A, B または C, ϕ　２つの初期条件から決定

$(\ast)$の解のグラフは常に正弦波



単振動の方程式 $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2 x=0$ を解く

Ex. 2-8

単振動の方程式　$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2 x=0$　を初期条件

$x(0)=x_0, \frac{dx}{dt}(0)=v_0$　のもとで解け.

一般解は　$x=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t$

$$\frac{dx}{dt}=\omega_0(-A\sin\omega_0 t+B\cos\omega_0 t)$$

$x(0)=x_0$ より $A=x_0$　　$\frac{dx}{dt}(0)=v_0$ より $B=\frac{v_0}{\omega_0}$

よって　$x(t)=x_0\cos\omega_0 t+\frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$

線形微分方程式

$$\sum_{k=0}^{K} a_k(t)\frac{d^k u}{dt^k} = f(t)$$ の形をした微分方程式を

線形微分方程式という.

特に $f(t)=0$ の場合, 斉次線形微分方程式と呼ぶ.

斉次線形微分方程式の複数個の解の線形結合は,
またもとの方程式の解になる.

Ex. 2-9

上のことを確かめよ.

また, この講義でこれまでに出てきた微分方程式のうち, 線形でないものはどれか.

力学的エネルギーの保存則

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

おもりの運動エネルギー　　　バネの弾性エネルギー

時間 t によらない定数

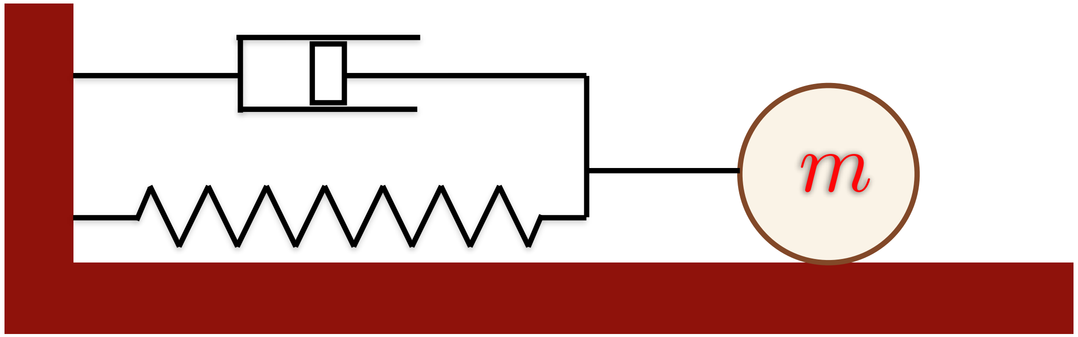
Ex. 2-10

質点が単振動の方程式に従って運動しているとき，
力学的エネルギー E が保存量であることを示せ．

$$\dot{E} = mv\dot{v} + kx\dot{x} = v\underbrace{\left(m\ddot{x} + kx\right)}_{\text{運動方程式より }0} = 0$$

バネ-マス-ダンパ系

バネの復元力＋ダンパの抵抗力



ダンパからは速度に比例する抵抗力 $-c\dfrac{dx}{dt}$ を受ける．

Ex. 2-11

おもりの位置 $x(t)$ の満たす微分方程式を求めよ．

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c\frac{dx}{dt}$$

バネ-マス-ダンパ系の方程式

$\gamma = \frac{c}{2m},\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ とおくと

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

線形微分方程式を見たら $\boxed{x(t) = e^{\lambda t}}$ と置いてみる！

Ex. 2-12

$x(t) = e^{\lambda t}$ と置いたときに λ が満たすべき方程式を求めよ.

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$ → 特性方程式

$\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\dfrac{dx}{dt}+\omega_0^2 x=0$ の一般解

特性方程式 $\boxed{\lambda^2+2\gamma\lambda+\omega_0^2=0}$

判別式 / 4 = $\gamma^2-\omega_0^2$

$\gamma=c/(2m)$：抵抗力の強さの指標

次の４通りの場合について一般解を求めよう．

(1) $\gamma=0$ $\quad x=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t=C\sin(\omega_0 t+\phi)$

(2) $0<\gamma<\omega_0$

(3) $\gamma=\omega_0$

(4) $\gamma>\omega_0$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\dfrac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ の一般解：場合(4)

$\gamma > \omega_0$ ： 抵抗力が強い場合

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \underbrace{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}_{\text{いずれも負}}$$

$$x_1 = e^{(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2})t} \quad と \quad x_2 = e^{(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2})t}$$

は一次独立な解である．

単振動の場合と同様，2つの解の一次結合は解である．

Ex.2-7 (3) 参照

一般解は $\boxed{x = Ae^{(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2})t} + Be^{(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2})t}}$

$\longrightarrow$ 指数的に減衰

律速過程

$$x = Ae^{(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2})t} + Be^{(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2})t}$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

Ex. 2-13

右辺の２項の内，$x(t)$ が 0 に収束する速さを決めるのはどちらか？

0 への収束が遅い方が全体の収束の速さを決める．

$-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} < -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} < 0$　　だから第１項

→ 律速過程

$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ の一般解：場合(2)

$0 < \gamma < \omega_0$ ： 抵抗力が弱い場合

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\gamma \pm i\omega$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$x_1 = e^{(-\gamma+i\omega)t} = e^{-\gamma t}e^{i\omega t} = e^{-\gamma t}(\cos\omega t + i\sin\omega t)$$ と

$$x_2 = e^{(-\gamma-i\omega)t} = e^{-\gamma t}e^{-i\omega t} = e^{-\gamma t}(\cos\omega t - i\sin\omega t)$$ が解.

x_1, x_2 の１次結合で２つの実数値関数を作る.

$$(x_1 + x_2)/2 = e^{-\gamma t}\cos\omega t \qquad (x_1 - x_2)/(2i) = e^{-\gamma t}\sin\omega t$$

一般解は $\boxed{x = e^{-\gamma t}\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right)}$ → 減衰振動

$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ の一般解：場合(3)

$\gamma = \omega_0$ ：境目の場合

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \gamma^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -\gamma$$ 重解！

$x_1 = e^{-\gamma t}$ は解であるが，もう一つは？

Ex. 2-14

$x_2 = te^{-\gamma t}$ が解であることを確かめよ．

一般解は $\boxed{x = e^{-\gamma t}(A + Bt)}$

$\longrightarrow$ 指数的に減衰

$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ の一般解(まとめ)

(1) $\gamma = 0$

$$x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

(2) $0 < \gamma < \omega_0$

$$x = e^{-\gamma t}\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right)$$

ただし $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

(3) $\gamma = \omega_0$

$$x = e^{-\gamma t}(A + Bt)$$

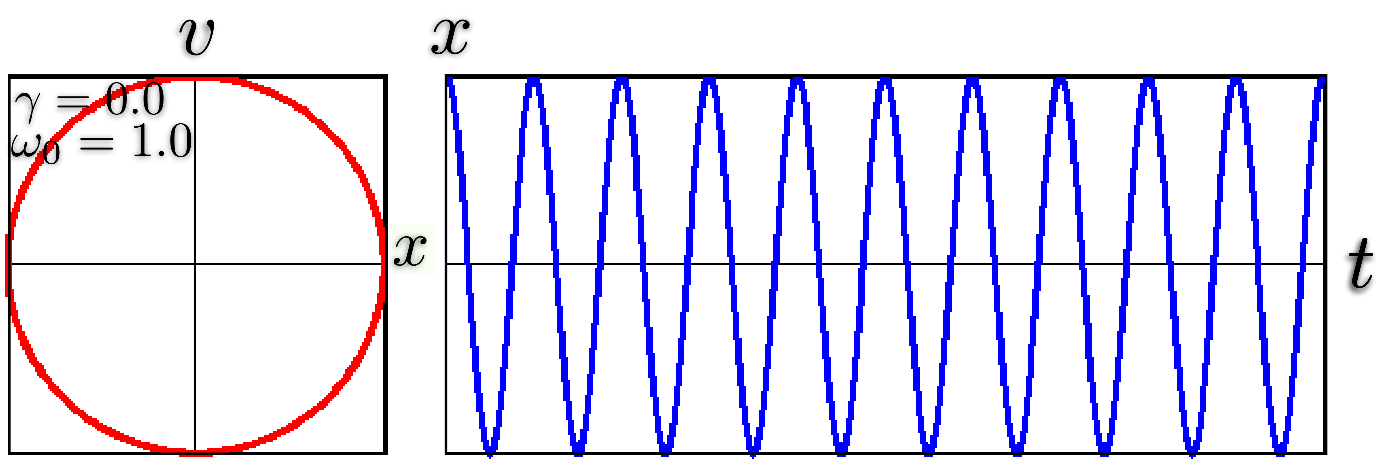
(4) $\gamma > \omega_0$

$$x = Ae^{(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2})t} + Be^{(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2})t}$$

解の減衰の様子あれこれ

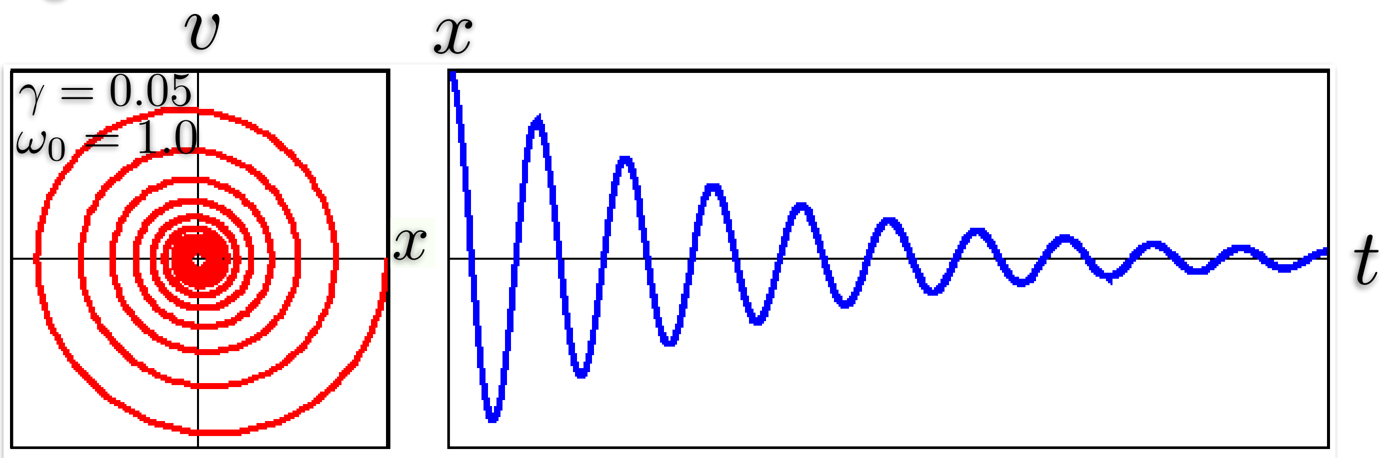
(1) $\gamma = 0$

単振動



(2) $0 < \gamma < \omega_0$

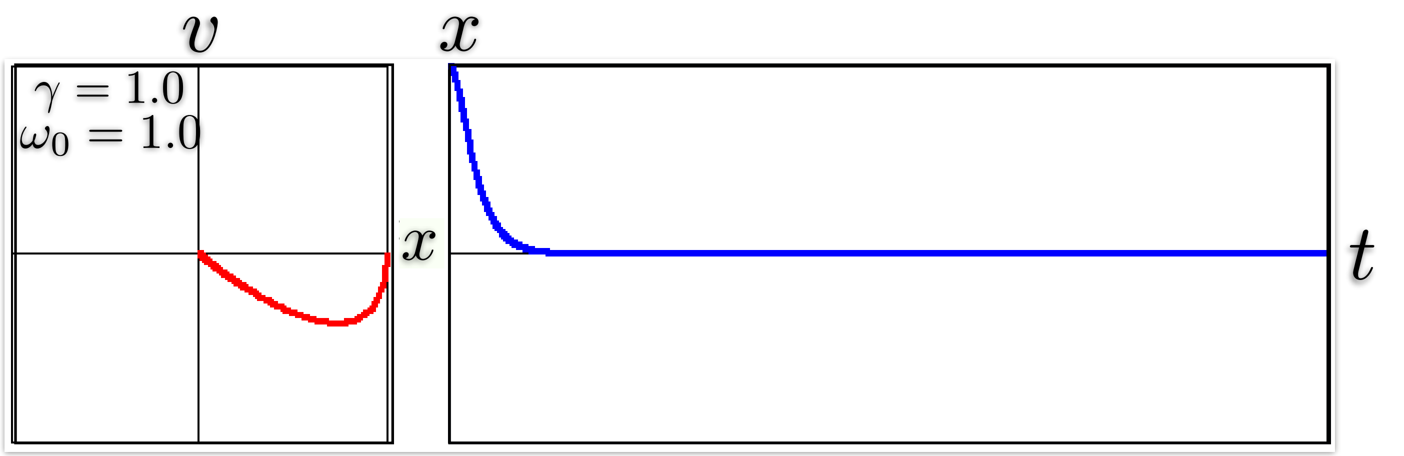
減衰振動



解の減衰の様子あれこれ

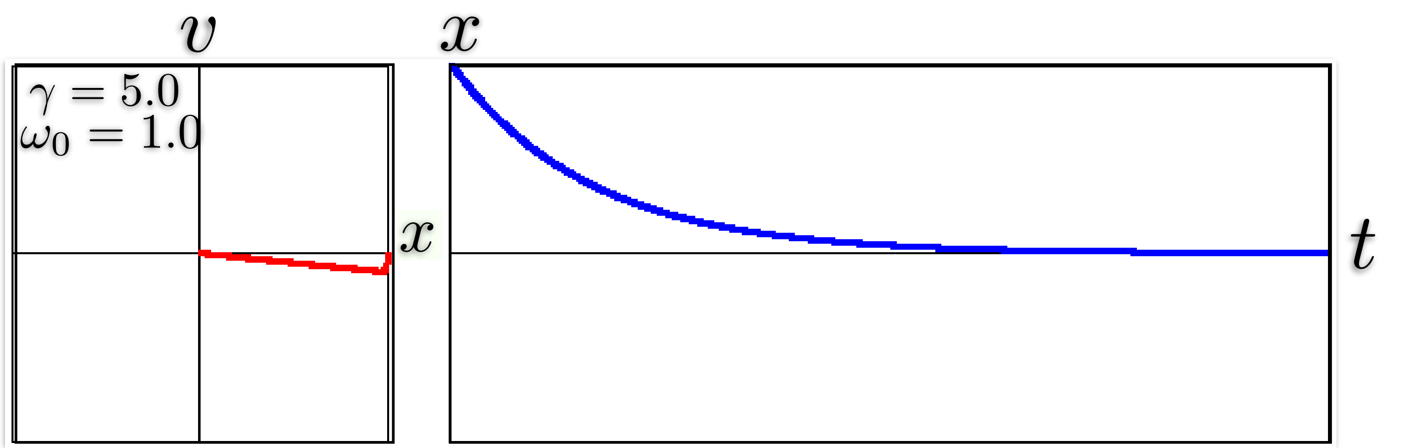
(3) $\gamma = \omega_0$

臨界減衰



(4) $\gamma > \omega_0$

過減衰



初期値問題を解く

Ex. 2-15　以下の微分方程式の初期値問題の解を求めよ.

(1) $$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

$$x(0) = 1,\ \frac{dx}{dt}(0) = 0$$

特性方程式は $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

$\longrightarrow\ \lambda = -1, -2$

一般解は $x(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t}$

$$\dot{x}(t) = -Ae^{-t} - 2Be^{-2t}$$

初期条件より

$$A + B = 1,\ -A - 2B = 0$$

$\longrightarrow\ A = 2, B = -1$

$$x(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

(2) $$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 5x = 0$$

$$x(0) = 0,\ \frac{dx}{dt}(0) = 1$$

特性方程式は $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$

$\longrightarrow\ \lambda = -2 \pm i$

一般解 $x(t) = e^{-2t}(A\cos t + B\sin t)$

$$\dot{x}(t) = -2e^{-2t}(A\cos t + B\sin t) + e^{-2t}(-A\sin t + B\cos t)$$

初期条件より

$$A = 0,\ -2A + B = 1$$

$\longrightarrow\ A = 0, B = 1$

$$x(t) = e^{-2t}\sin t$$

初期値問題を解く

Ex. 2-16（Report1）

以下の微分方程式の初期値問題の解を求めよ．
また，$t>0$ の範囲でグラフの概形を書き，$x(t)=0$ となる t を求めよ．

(1)
$$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=0$$
$$x(0)=-1,\ \dot{x}(0)=3$$

(2)
$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+2x=0$$
$$x(0)=1,\ \dot{x}(0)=0$$

(3)
$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+x=0$$
$$x(0)=1,\ \dot{x}(0)=0$$

(4)
$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=0$$
$$x(0)=\sqrt{3},\ \dot{x}(0)=1$$

レポート問題

何でレポートを作成するか？

1. TeX でやる.
   1年の時に富樫先生に習ったはず.
   卒論作成は TeX でやることになるだろう.
   - 自分のパソコンに TeXLive をインストールする.
   - Overleaf を使う（ブラウザ上でTeX文書作成）.
2. Word でやる. （数学科の人は TeX が望ましい）

どうやってレポートを提出するか？

授業の HP にアップロードできるようにする.

ファイル形式は pdf に統一.

減衰の速さ比べ

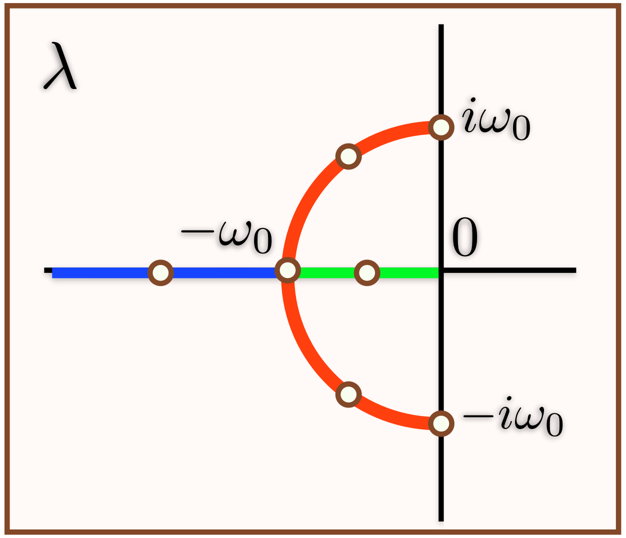
$0 \leq \gamma < \omega_0$ $\qquad x = e^{-\gamma t}\left(A\cos\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t + B\sin\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t\right)$

$\gamma > \omega_0$ $\qquad x = Ae^{(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2})t} + Be^{(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2})t}$

$\gamma = \omega_0$ $\qquad x = e^{-\gamma t}(A+Bt)$

Ex. 2-17

ω_0 を固定し γ をパラメータとして動かしたとき
特性方程式 $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$
の２つの解の軌跡を複素平面上
にプロットしてみよ．

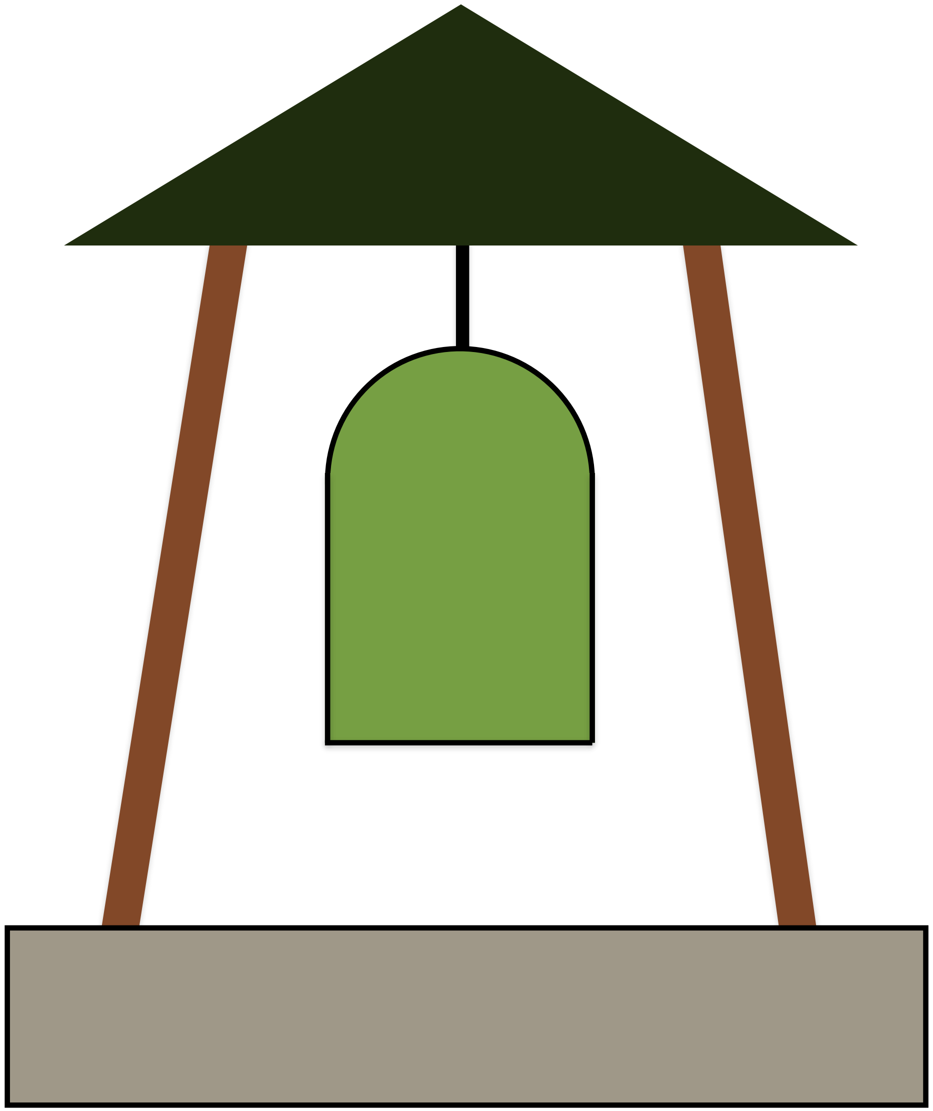


Ex. 2-18

最も早く減衰するのは，γ を
いくらぐらいにとったときか?

$\gamma = \omega_0$ 臨界減衰の場合！

釣鐘は動くか？



一休さん曰く，

「小指１本で釣鐘を動かしてごらんにいれましょう」

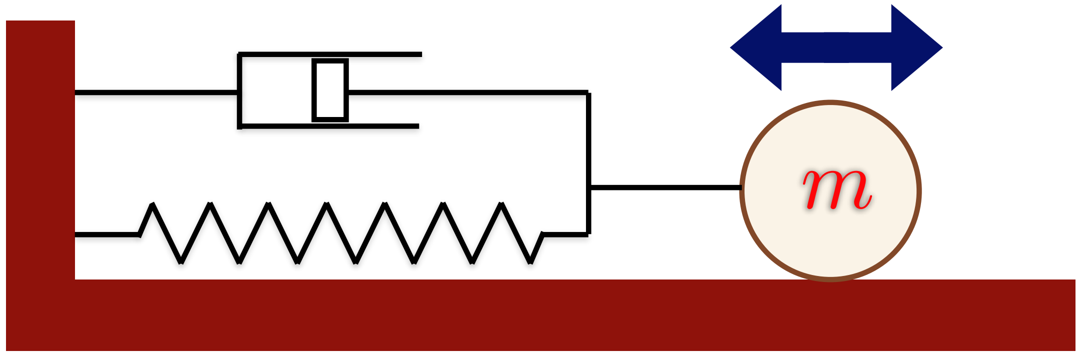
⇨ できるけれど
タイミングが肝心！

Ex. 2-19

実生活の中で似たような体験をしたことはないか？

強制振動

強制的な振動的外力 $\longrightarrow$ $mA\cos\omega t$



バネ - ダンパ系

$$0 < \gamma < \omega_0$$

元の系は減衰振動

$\Rightarrow$ $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ という振動数が内在している

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A\cos\omega t}$$

強制振動の角振動数 ω の値をいろいろ動かしたとき，バネ-ダンパ系の応答はどのようなものであるか？

複素数値関数への拡張

複素数値関数　$z(t) = x(t) + iy(t)$　の方程式

$$\boxed{\frac{d^2 z}{dt^2} + 2\gamma \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = Ae^{i\omega t}}$$

を考える．

Ex. 2-20

この方程式を満たす $z(t)$ を見つければ，その実部である $x(t)$ は $\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A\cos\omega t$ の解であることを示せ．　また虚部 $y(t)$ が満たす方程式は？

$$\left(\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x\right) + i\left(\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\gamma \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y\right) = A\cos\omega t + iA\sin\omega t$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A\cos\omega t \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\gamma \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = A\sin\omega t$$

特解を探せ！

$$\boxed{\frac{d^2z}{dt^2} + 2\gamma\frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = Ae^{i\omega t}}$$

→ とにもかくにも１つ特解を見つけよう！

Ex. 2-21

$z_s(t) = RAe^{i\omega t}$　（ R : 複素数) とおくことに

よって特解を求めよ.

→ 複素増幅率 (応答/入力)

$$\{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\gamma\omega i\}RAe^{i\omega t} = Ae^{i\omega t}$$

$$R = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\gamma\omega i} \qquad z_s(t) = RAe^{i\omega t} = \frac{A}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\gamma\omega i}\,e^{i\omega t}$$

$$z_s(t) = RAe^{i\omega t} = \frac{Ae^{i\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\gamma\omega i}$$

複素増幅率 R の意味を考える

複素増幅率 $R = \dfrac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\gamma\omega i}$ を

極形式で表してみよう．　$R = R_0 e^{-i\phi}$

$$\rightarrow \boxed{z_s(t) = R_0 A e^{i(\omega t - \phi)}}$$

R_0 振幅増幅率

ϕ 位相遅れ

Ex. 2-22

R_0 と ϕ を求めよ．

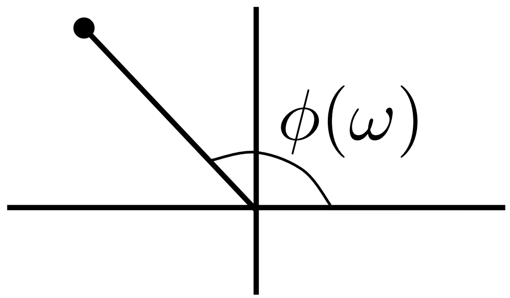
このとき $0 < \phi < \pi$ としてよいのはなぜか？

Hint. $R^{-1} = R_0^{-1} e^{i\phi}$

$$R_0 = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

$$\phi = \mathrm{Arg}((\omega_0^2 - \omega^2) + 2\gamma\omega i)$$

$R^{-1} = (\omega_0^2 - \omega^2) + 2\gamma\omega i$



特解を求める（複素関数解）

Ex. 2-23

以下の方程式について特解 $z_s(t)$ を求めよ.

(1) $$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dz}{dt}+2z=e^{it}$$

$$z_s(t)=Re^{it}$$

$$-Re^{it}+iRe^{it}+2Re^{it}=e^{it}$$

$$(1+i)Re^{it}=e^{it}$$

$$R^{-1}=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$R=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_s(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(t-\frac{\pi}{4}\right)}$$

(2) $$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{dz}{dt}+z=e^{2it}$$

$$z_s(t)=Re^{2it}$$

$$-4Re^{2it}+i\sqrt{3}Re^{2it}+Re^{2it}=e^{2it}$$

$$(-3+i\sqrt{3})Re^{2it}=e^{2it}$$

$$R^{-1}=-3+i\sqrt{3}=2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)$$

$$=2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$R=\frac{1}{2\sqrt{3}}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z_s(t)=\frac{1}{2\sqrt{3}}e^{i\left(2t-\frac{5\pi}{6}\right)}$$

特解と強制振動項の関係

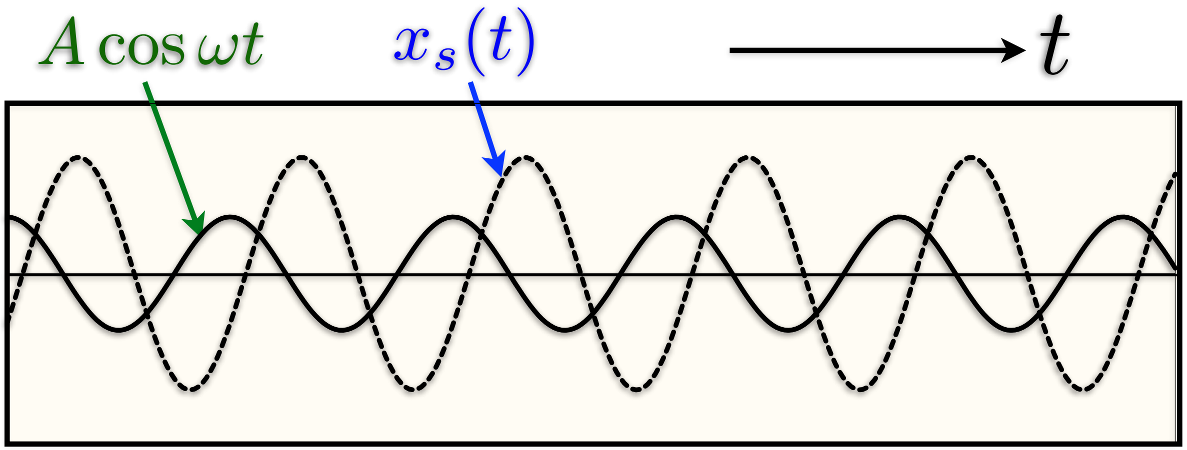
Ex. 2-24

元の方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\dfrac{dx}{dt}+\omega_0^2x=A\cos\omega t$

の特解 $x_s(t)$ を $R_0,\ \phi$ を用いて表せ.

$z_s(t)=R_0Ae^{i(\omega t-\phi)}$ の実部をとって

$$\boxed{x_s(t)=R_0A\cos(\omega t-\phi)}$$



R_0 振幅増幅率

ϕ 位相遅れ

特解を求める（実関数解）

Ex. 2-25

以下の方程式について特解 $x_s(t)$ を求めよ.

Hint: Ex. 2-23の $z_s(t)$ を利用する.

(1) $$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+2x=\cos t$$

$$x_s(t)=\mathrm{Re}\ z_s(t)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$$

(2) $$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{dx}{dt}+x=\sin 2t$$

$$x_s(t)=\mathrm{Im}\ z_s(t)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\sin\left(2t-\frac{5\pi}{6}\right)$$

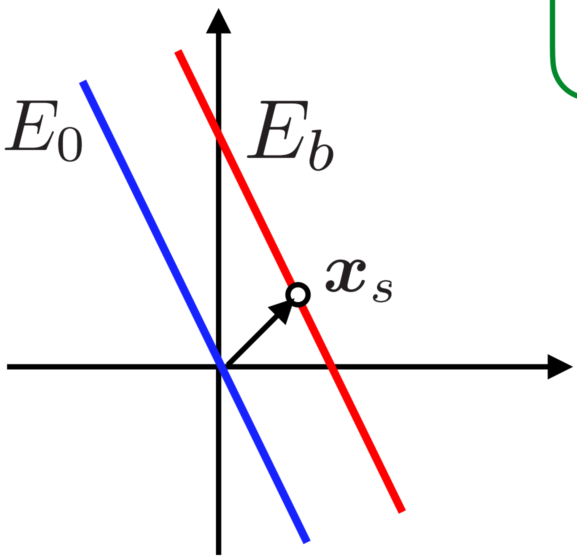
ちょっと線形代数の問題

A : n 次正方行列として方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を考える．

解集合 $E_b = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$ （注：$\mathrm{Ker}A = E_0$ ）

$\dim E_0 \geq 1$ とする．（ A は非正則）

- $\boldsymbol{b} \notin \mathrm{Im}A$ ならば $E_b = \emptyset$ は明らか．
- $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}A$ のとき，E_bはどんな集合だろうか？



$$\boxed{\boldsymbol{x}_s \in E_b \longrightarrow E_b = \boldsymbol{x}_s + E_0}$$

$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_s + \boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in E_0)$ とすると

$A\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}_s + A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{y} \in E_b$

$\boldsymbol{y} \in E_b$ とする $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_s$ とおけば

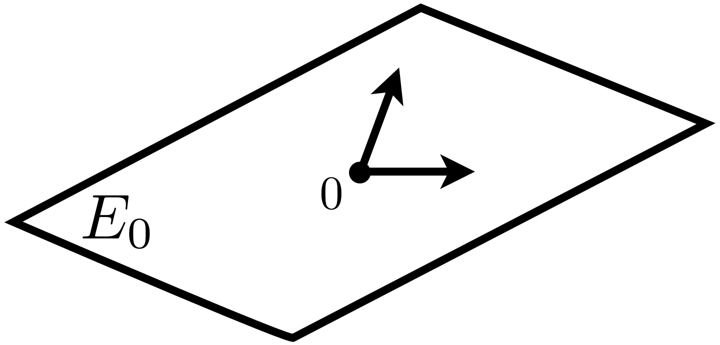
$A\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{0}$ より $\boldsymbol{x} \in E_0$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_s + \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{x}_s + E_0$

斉次方程式 vs. 非斉次方程式

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

⇨ 斉次線形微分方程式



2 次元部分空間

基底

$0 \leq \gamma < \omega_0$	$e^{-\gamma t}\cos\omega t,\ e^{-\gamma t}\sin\omega t$ $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$
$\gamma = \omega_0$	$e^{-\gamma t},\ te^{-\gamma t}$
$\gamma > \omega_0$	$e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t},\ e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f(t)}$$

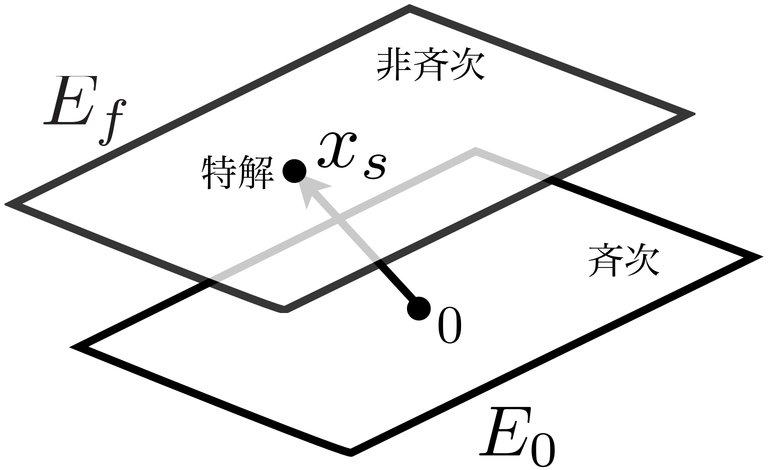
⇨ 非斉次線形微分方程式

斉次方程式 vs. 非斉次方程式

Ex. 2-26

非斉次方程式の一般解全体の集合を E_f

斉次方程式の一般解全体の集合を E_0 とする.



x_sが非斉次方程式の特解であるとき

$$E_f = x_s + E_0 := \{x_s + x;\ x \in E_0\}$$

であることを示せ.

$$\ddot{x}_s + 2\gamma\dot{x}_s + \omega_0^2 x_s = f$$

$y = x_s + x \quad (x \in E_0)$ とすると $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \omega_0^2 y = f$ なので $y \in E_f$

$y \in E_f$ とすると $\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \omega_0^2 y = f$

$x = y - x_s$ とおくと $x \in E_0$ なので $y \in x_s + E_0$

特解と一般解

Ex. 2-27

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=A\cos\omega t$$ の一般解を求めよ.

(非斉次方程式の一般解) =

(非斉次方程式の特解) + (斉次方程式の一般解)

$$x_s(t)=R_0A\cos(\omega t-\phi)$$

$$x(t)=x_s(t)+\underline{e^{-\gamma t}\left(B\cos\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t+C\sin\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t\right)}$$

係数 B,C は初期値によって決まる.

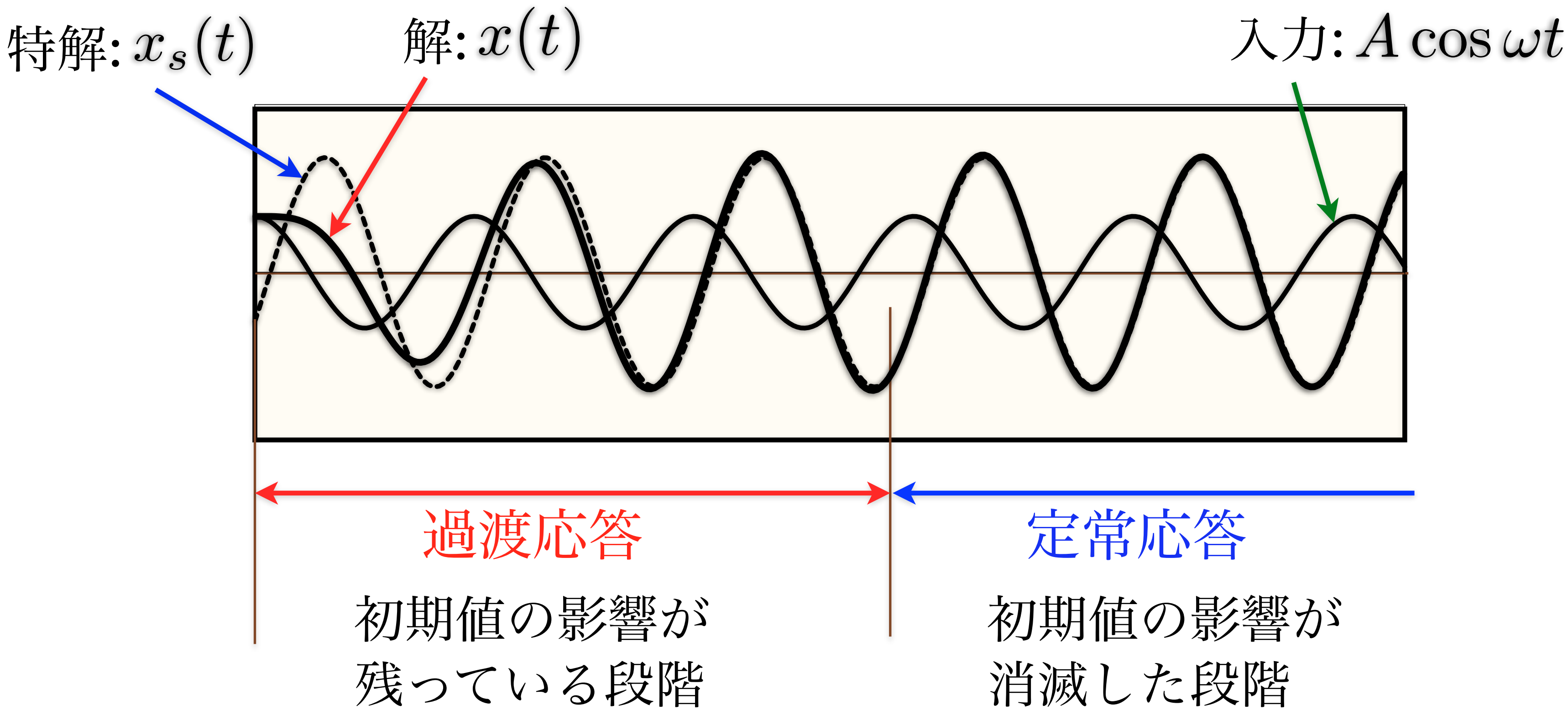
初期値が何であれ，斉次方程式の解 は時間が経てば指数的に減衰して消えてしまう.

定常応答と過渡応答

$\gamma > 0$ である限り，ある程度時間が経てば

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\dfrac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A\cos\omega t$ のすべての解は

$x_s(t) = R_0 A\cos(\omega t - \phi)$ という正弦的振動に収束する．



練習問題

Ex. 2-28

$$\ddot{x}+\dot{x}+x=\cos t$$

(1) 定常応答を求めよ.

(2) 初期値 $x(0)=2,\ \dot{x}(0)=0$ を満たす解を求めよ.

(1) まず複素の定常応答（特解） $z_s(t)$ を求める.

$\ddot{z}_s+\dot{z}_s+z_s=e^{it}$ において $z_s=Re^{it}$ と置くと $R=-i$

よって $x_s(t)=\mathrm{Re}\ z_s(t)=\mathrm{Re}\ (-ie^{it})=\sin t$

(2) 右辺を 0 で置き換えた斉次方程式 $\ddot{x}+\dot{x}+x=0$ の特性

方程式の解は $\lambda=-1/2\pm\sqrt{3}/2\ i$ ゆえに非斉次方程式の一般解は

$$x(t)=\sin t+e^{-\frac{1}{2}t}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

初期条件より $A=2,B=0$

$$x(t)=\sin t+2e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

共鳴（共振）

Ex. 2-29

$R_0(\omega)$ が $\omega > 0$ で最大値を持つための条件を求め，その条件が満たされるとき，$R_0(\omega)$ の最大値を与える $\bar{\omega}$ と最大値 $R_0(\bar{\omega})$ を求めよ．

$\gamma < \omega_0/\sqrt{2}$ が条件でこのとき $\bar{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ $R_0(\bar{\omega}) = \dfrac{1}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$

Ex. 2-30

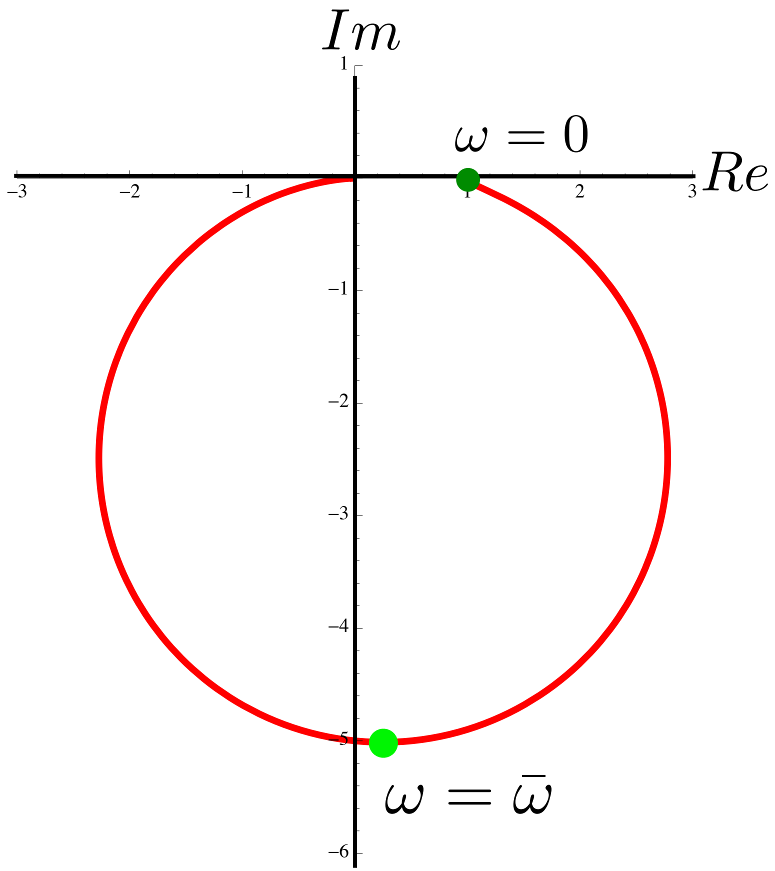
$\omega_0 = 1$, $\gamma = 0.1$ のとき，$\bar{\omega}$ と $R_0(\bar{\omega})$ を概算で求めよ．

$$\bar{\omega} = \sqrt{1 - 0.02} = 1 - 0.01 = 0.99 \qquad R_0(\bar{\omega}) = \frac{1}{2 \times 0.1 \times \sqrt{1 - 0.01}} \simeq 5$$

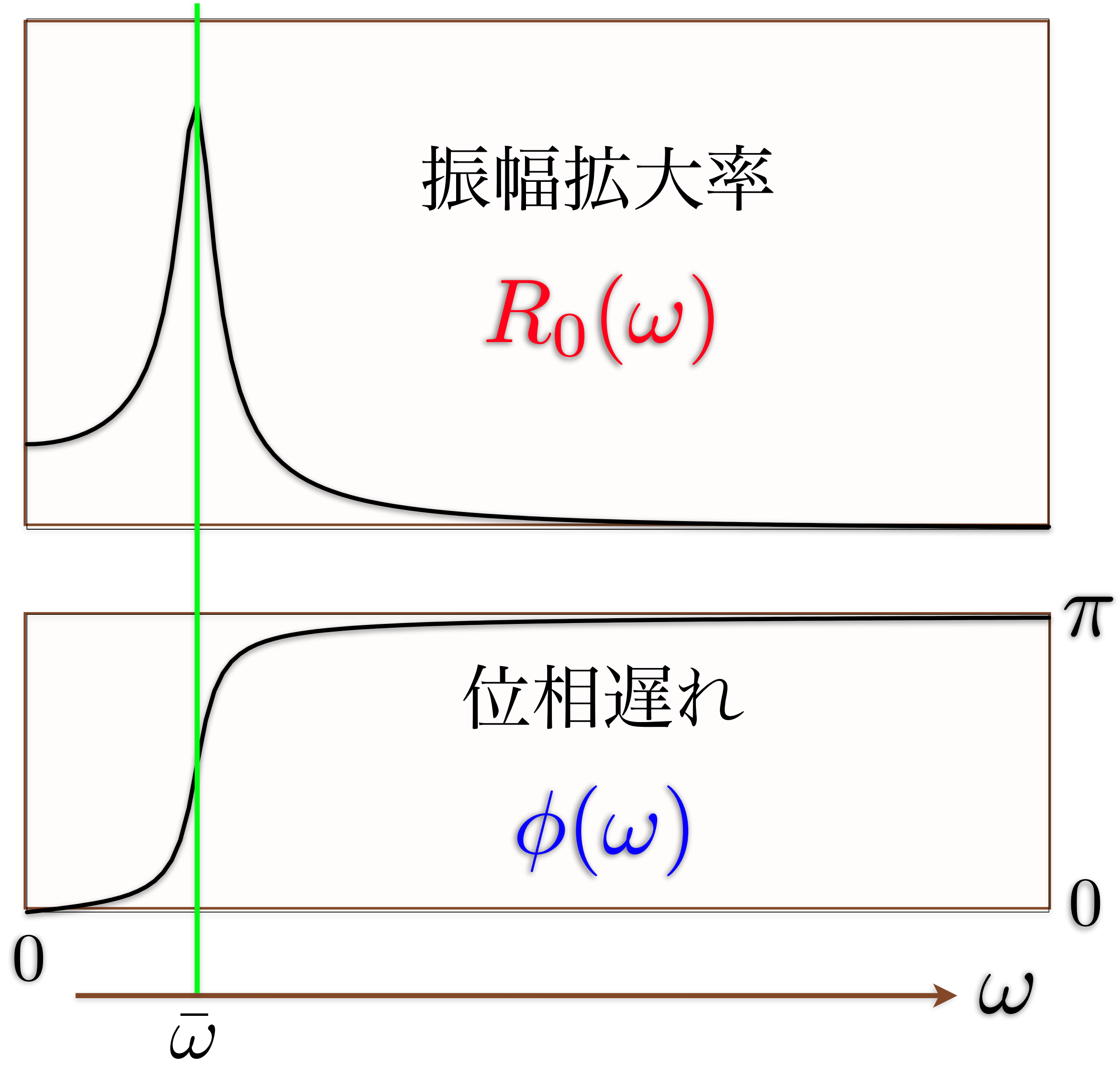
ω が $\bar{\omega}$ に近い値をとり，振幅増幅率がピーク値に近くなることを共鳴または共振という．

ω vs. 複素増幅率 $R(\omega)$

$$R(\omega) = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\gamma\omega i}$$

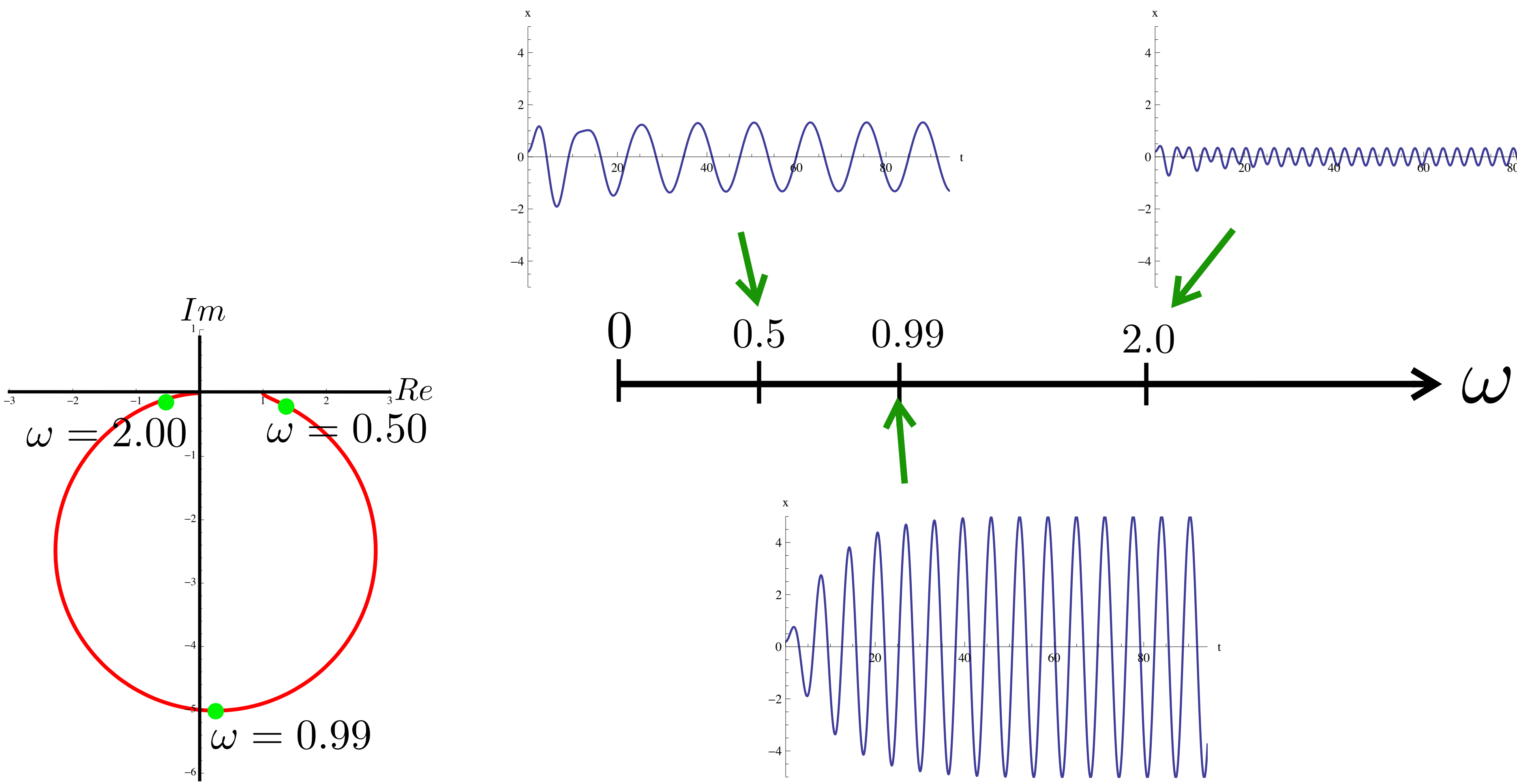


共鳴点(共振点)

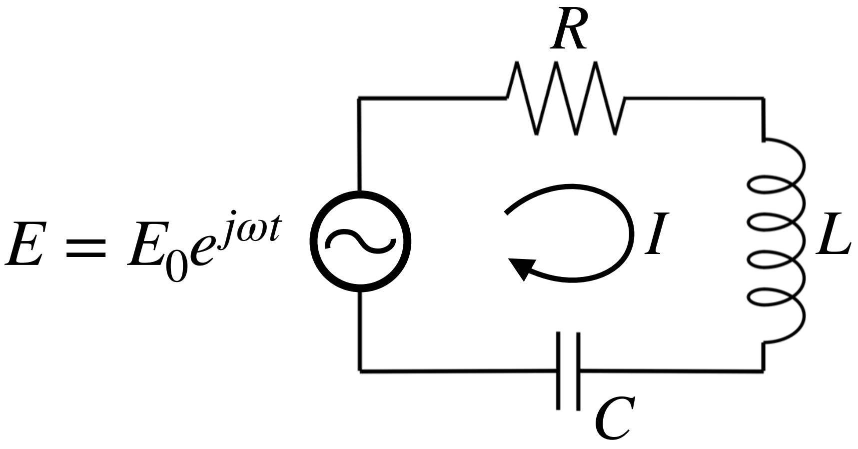


強制振動に対する応答

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A\cos\omega t \qquad \omega_0 = 1.0,\ \ \gamma = 0.1$$



LCR直列回路（同調回路）



$$E = V_R + V_L + V_C$$

$$V_R = RI$$

$$V_L = L\dot{I}$$

$$CV_C = Q$$

$$\dot{V}_R + \dot{V}_L + \dot{V}_C = \dot{E}$$

$$R\dot{I} + L\ddot{I} + \frac{1}{C}I = j\omega E_0 e^{j\omega t} \qquad (C\dot{V}_C = \dot{Q} = I)$$

Ex. 2-31

$I = YE_0e^{j\omega t}$ とおいて $|Y|$ を最大化する ω を求めよ.

$$Y\left[jR\omega+\left(-L\omega^2+\frac{1}{C}\right)\right]=j\omega$$

$$Y^{-1}=R+j\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)=Z$$ ：インピーダンス

$|Z|$ を最小化するのは $L\omega=\dfrac{1}{C\omega}$ のとき，すなわち

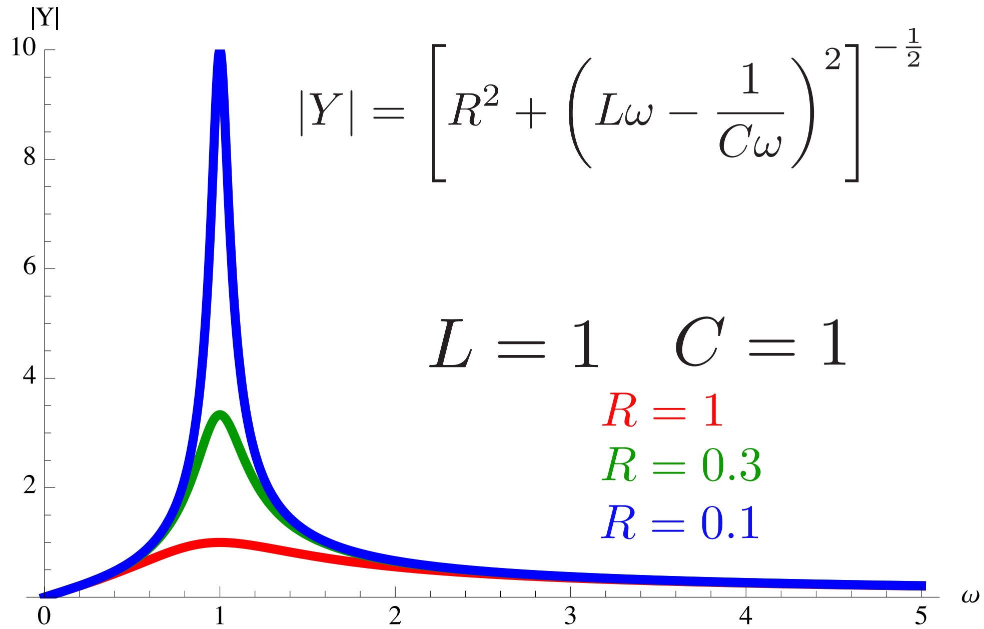
$\omega=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ のときである．このとき $Z=R$ である．

インピーダンス Z は

$$Z=\frac{E}{I}=\frac{E_0e^{j\omega t}}{I}$$

と表せるので，交流版の
抵抗値である．（単位：Ω ）

$Y=Z^{-1}$：アドミッタンス



地震と共振

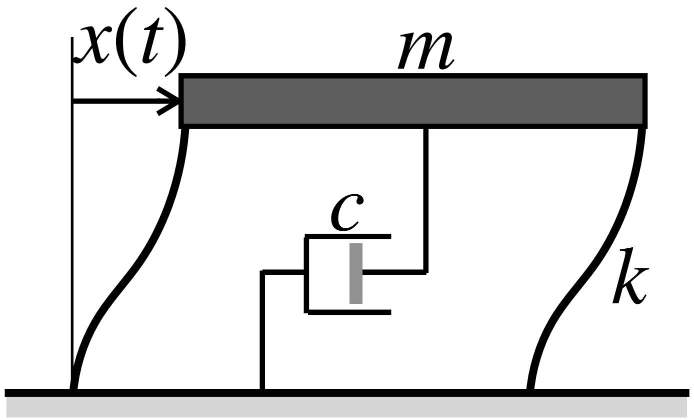
東日本大震災のとき，震源から遠く離れた大阪府咲洲庁舎が大揺れに揺れた.
（最上階で往復 3mぐらい！）

周期6.5秒の地盤の揺れが共振を起こした.

名古屋大学 護(もり)准教授談

地震と共振

単純化した建物の振動のモデル



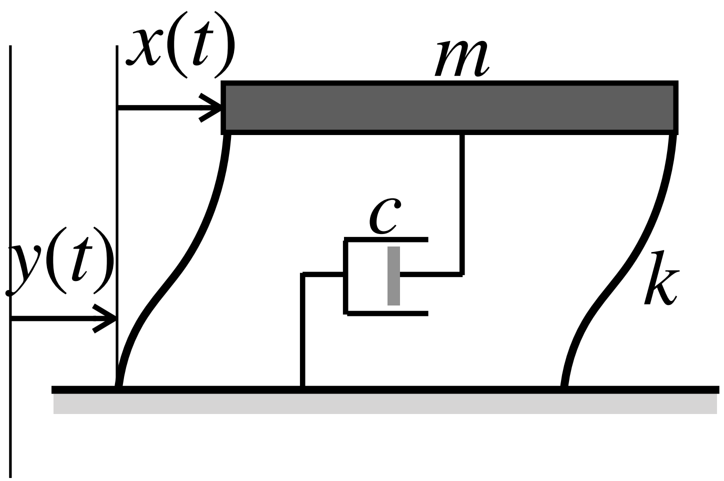
$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0$$

$$\omega_0=\sqrt{k/m},\ c_c=2\sqrt{mk}$$

$$h=c/c_c<1$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2h\omega_0\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0$$

+ 地盤自体の動き $y(t)$



$$m\frac{d^2}{dt^2}(y+x)+c\frac{dx}{dt}+kx=0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2h\omega_0\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=-\frac{d^2y}{dt^2}$$

地震と共振

Ex. 2-32　　(Report2)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\omega_0\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = -\frac{d^2y}{dt^2}$$

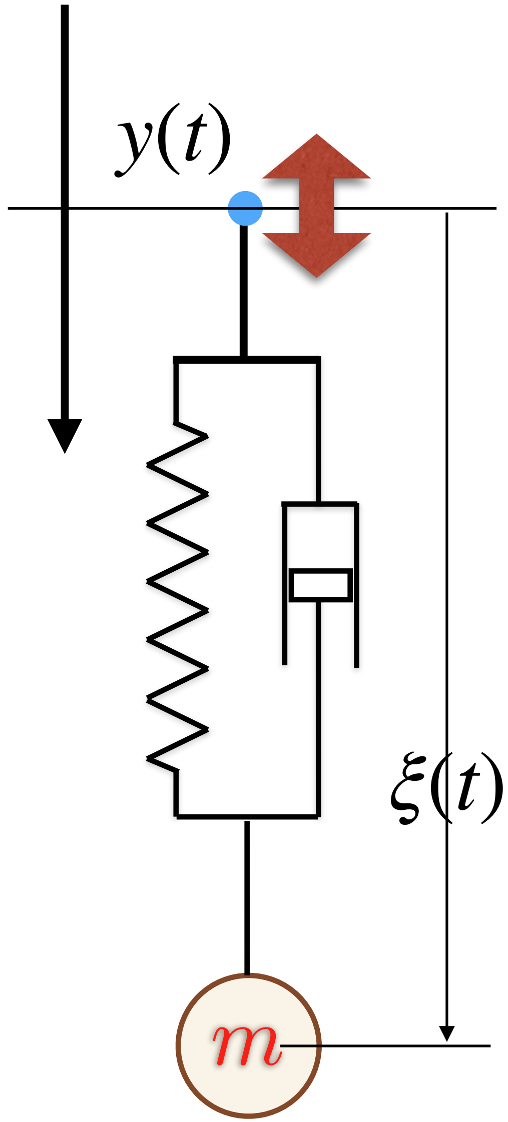
において，地震による地盤の動きを $y(t) = A\sin\omega t$ で与え，それに対する特解を $x_s(t) = MA\sin(\omega t - \phi)$ と書くとする．

$M = M(\tilde{\omega})$　　$\tilde{\omega} = \omega/\omega_0$ のグラフを色々な $h < 1$ に対し重ね書きしてみよ．

地震における共振現象による危険性と，その対策について議論せよ．

Ex. 2-33

水風船のモデル方程式が上の方程式と同じように書けることを確かめよ.



バネの自然長

$$m\frac{d^2}{dt^2}(y+\xi) = -k(\xi - l_0) - c\frac{d\xi}{dt} + mg$$

$$\xi(t) = l_0 + \frac{mg}{k} + x(t) \quad \text{とおくと}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = -m\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m},\ c_c = 2\sqrt{mk}$$

$$h = c/c_c < 1$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\omega_0\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = -\frac{d^2y}{dt^2}$$